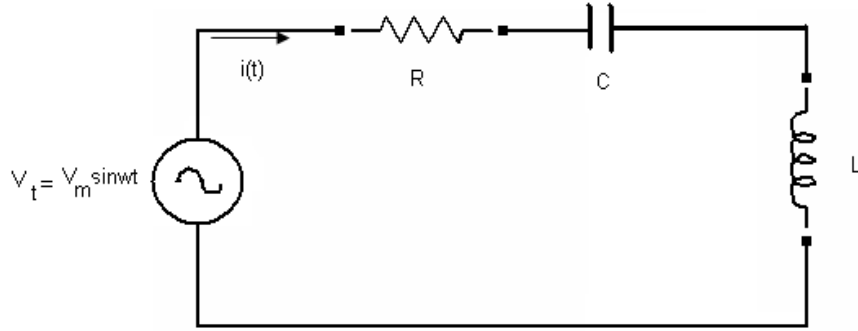
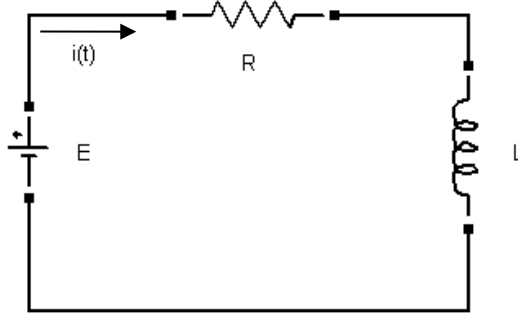


SAKARYA ÜNİVERSİTESİ MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
DİFERANSİYEL DENKLEMLER VİZE SINAV SORULARI ve Çözümleri



Şekil 1

- Soru 1)** Şekil 1’de verilen devrede $R=2 \Omega$, $L=1 \text{ H}$, $C=1 \text{ F}$, $V_m = 220\sqrt{2} \text{ Volt}$, $\omega=2\pi \cdot 50 \text{ rad/sn}$ olarak verilmektedir. Devreden akan $i(t)$ akımına ilişkin genel çözümü bulunuz. **(15 puan)**
- Soru 2)** Şekil 2’de verilen devrede $E=100 \text{ V}$, $R=2 \text{ ohm}$, $L=4 \text{ henry}$ olarak verilmektedir. $i(t=0)=3 \text{ A}$ olduğuna göre devreden geçen akıma ilişkin tam çözüm $i(t)$ içinde sabit kalmayacak) ifadesini bulunuz. **(15 puan)**



Şekil 2

Soru3)
$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{G}{C} & -\frac{1-G}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} i_k(t)$$
 ; $G=1 \text{ mho}$; $C=1 \text{ F}$; $L=1 \text{ H}$;

Yukarıda verilen durum denkleminde durum değişkenlerine ilişkin genel çözümleri bulunuz. **(20 puan)**

- Soru 4)** $y = Ax + B/x$ eğri ailesine ilişkin diferansiyel denklemi bulunuz. **(5 puan)**
- Soru 5)** $(x^2 + 2xy + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$ diferansiyel denklemi tam diferansiyel denklem midir?. Eğer değilse $\mu = \mu(x+y) = \mu(v)$ alarak tam diferansiyel denklem haline getirerek genel çözümü bulunuz. **(15 puan)**
- Soru 6)** $e^y y' + e^y = 4e^{-x} \sin x$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü, $u = e^y$ değişken dönüşümü yardımı ile bulunuz. **(15 puan)**
- Soru 7)** $2x^2 y'' + 8xy' + 4y = 2x^2$ denkleminin genel çözümünü bulunuz. **(15 puan)**

Sınav süresi 100 dakikadır. Yalnızca ders notları açıktır, bunun dışında notlar ve açıklamalar kaldırılacaktır. Soru kağıtları öğrencide kalacaktır. Başarılar dilerim.

Prof.Dr.Uğur Arifoğlu

Çözümler

$$1) L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = V_m \sin(\omega t)$$

Yukarıda verilen denklemin her iki tarafının türevi alınır;

$$L i''(t) + R i'(t) + (1/C) i(t) = \omega V_m \cos(\omega t)$$

elde edilir. Problemden verilen parametreler yukarıda elde edilen ikinci mertebeden diferansiyel denklemde yerlerine konulursa;

$$i''(t) + 2i'(t) + i(t) = 9.77 \cdot 10^4 \cos(\omega t) \quad (1)$$

elde edilir. Önce sağ tarafsız olarak diferansiyel denklem çözülmelidir:

$$\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0 \Rightarrow (\alpha + 1)^2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = -1 \quad (\alpha = -1 \text{ için katlı kök var})$$

Homojen çözüm:

$$i_h = C_1 e^{-t} + t C_2 e^{-t}$$

Sağ tarafı işin içine sokarak çözmek istersek, özel çözüm tahmini; $y_p = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$ ifadesi (1) eşitliğinde yerine konulmalıdır:

$$y_p' = A \omega \cos(\omega t) - B \omega \sin(\omega t) \quad (2)$$

$$y_p'' = -A \omega^2 \sin(\omega t) - B \omega^2 \cos(\omega t) \quad (3)$$

(2) ve (3) eşitlikleri (1) ifadesinde yerine konulursa;

$$-A \omega^2 \sin(\omega t) - B \omega^2 \cos(\omega t) + 2(A \omega \cos(\omega t) - B \omega \sin(\omega t)) + A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) = 9.77 \cdot 10^4 \cos(\omega t) \quad (4)$$

(4) eşitliğinde $\sin(\omega t)$ ve $\cos(\omega t)$ katsayıları karşılıklı olarak birbirlerine eşitlenirse;

$$-A \omega^2 - 2B \omega + A = 0 \Rightarrow -98696A - 628B + A = 0$$

$$-B \omega^2 + 2A \omega + B = -1 \Rightarrow -98696B + 628A + B = 9.77 \cdot 10^4$$

$$A = 0.63 \cdot 10^{-2}; B = -0.98$$

elde edilir. Homojen ve özel çözümlerin toplamından genel çözüm;

$$i_g(t) = C_1 e^{-t} + t C_2 e^{-t} + 0.63 \cdot 10^{-2} \sin(\omega t) - 0.98 \cos(\omega t)$$

bulunur.

$$2) E = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) \Rightarrow 100 = 4i' + 2i \Rightarrow 50 = 2i' + i \quad (5)$$

Homojen çözüm:

$$2\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = -0.5$$

$$i_h = C_1 e^{-0.5t}$$

Özel çözüm:

$$y_p = A$$

Özel çözüm tahmini (5) ifadesinde yerine konulursa;

$$50 = 0 + A \Rightarrow A = 50$$

elde edilir. Genel çözüm;

$$i_g(t) = C_1 e^{-0.5t} + 50$$

bulunur. $t=0$ için akım değeri 3A olarak verildiğine göre;

$$3 = C_1 e^{-0} + 50 \Rightarrow C_1 = -47$$

$$i_{\text{tam}}(t) = -47 e^{-0.5t} + 50 \text{ Amper (tam çözüm)}$$

olarak bulunur.

$$3) \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} i_k(t) \quad (6)$$

$$\det|\alpha I - A| = \begin{vmatrix} \alpha+1 & 0 \\ -1 & \alpha+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\alpha+1)^2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = -1$$

Homojen çözüm:

$$\begin{bmatrix} v_c(t)_{\text{hom}} \\ i_L(t)_{\text{hom}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} t e^{-t} \quad (7)$$

(7) eşitliği (6) eşitliğindeki kaynaksız ($i_k(t)$) hal ifadesini sağlamak zorundadır:

$$\begin{bmatrix} -C_1 \\ C_1 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} 0 \\ -C_2 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} C_3 \\ C_3 - C_4 \end{bmatrix} t e^{-t} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} t e^{-t} \quad (8)$$

(8) ifadesinde e^{-t} 'li ifadeler karşılıklı olarak birbirlerine eşitlenirse;

$$-C_1 = -C_1 + C_3 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$C_1 - C_2 = -C_2 + C_4 \Rightarrow C_1 = C_4$$

$$\begin{bmatrix} v_c(t)_{\text{hom}} \\ i_L(t)_{\text{hom}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} 0 \\ C_1 \end{bmatrix} t e^{-t} \quad (9)$$

elde edilir. Özel çözüm için ise kaynak sabit ve 5A değerinde olduğundan;

Özel çözüm tahmini:

$$\begin{bmatrix} v_c(t)_p \\ i_L(t)_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

olacaktır. (10) eşitliği (6) ifadesini sağlamak zorundadır.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} i_k(t) \Rightarrow \begin{aligned} 0 &= -A_1 + 5 \\ 0 &= A_1 - A_2 \end{aligned} \Rightarrow A_1 = 5; \Rightarrow A_2 = 5$$

Özel çözüm:

$$\begin{bmatrix} v_c(t)_p \\ i_L(t)_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ Amper}$$

Genel çözüm:

$$\begin{bmatrix} v_c(t)_g \\ i_L(t)_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} 0 \\ C_1 \end{bmatrix} t e^{-t} + \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} u(t) \quad ; \quad u(t): \text{birim basamak fonksiyonu}$$

$$4) y = Ax + B/x \Rightarrow xy = Ax^2 + B \quad (11)$$

$$(11) \text{ ifadesinin türevi alınırsa } \Rightarrow y + xy' = 2Ax \quad (12)$$

$$(12) \text{ ifadesinin türevi alınırsa } \Rightarrow y' + y' + xy'' = 2A \quad (13)$$

(12) ve (13) ifadelerinden A çekilir ve birbirlerine eşitlenirse;

$$\frac{y + xy'}{2x} = A = \frac{y' + y' + xy''}{2} \Rightarrow \frac{y + xy'}{2x} = \frac{2y' + xy''}{2}$$

$$x^2 y'' + xy' - y = 0$$

bulunur.

$$5) (x^2 + 2xy + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 2y \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 2x \quad \text{olduğu için verilen diferansiyel denklem tam dif.değildir. (v=x+y verilmiş)}$$

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{N_x - M_y}{Mv_y - Nv_x} = \frac{2x - 2x - 2y}{(x^2 + 2xy + y^2) \cdot 1 - (x^2 - y^2) \cdot 1} = \frac{-2y}{2xy + 2y^2} = -\frac{1}{x+y}$$

$$\frac{\mu'(v)}{\mu(v)} = -\frac{1}{x+y} \Rightarrow \frac{d\mu}{dv} = -\frac{1}{v} \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{dv}{v} \Rightarrow \ln \mu = -\ln v \Rightarrow \ln \mu = \ln \frac{1}{v} \Rightarrow \mu = \frac{1}{v} = \frac{1}{x+y}$$

Verilen diferansiyel denklem μ ile çarpılırsa;

$$\frac{(x^2 + 2xy + y^2)}{x+y} dx + \frac{(x^2 - y^2)}{x+y} dy = 0 \Rightarrow (x+y)dx + (x-y)dy = 0 \quad (14)$$

elde edilir. (14) ifadesinde;

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 1 \text{ olduğundan dolayı (14) eşitliği tam diferansiyel denklemdir.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M = (x+y) ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N = (x-y)$$

$$u(x, y) = \int (x+y) dx + C(y) \Rightarrow u(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + C(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + C'(y) = (x-y)$$

$$C'(y) = -y \Rightarrow C = -\frac{y^2}{2} + C_1$$

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} + C_1$$

$$u(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 + C_1 \text{ (genel çözüm-ilkel)}$$

6) $e^y y' + e^y = 4e^{-x} \sin x ; u = e^y ; u' = e^y y'$

Yukarıda elde edilen ifadeler verilen diferansiyel denklemde yerine konulur ise;

$$u' + u = 4e^{-x} \sin x \text{ (lineer dif.denk.)}$$

Önce denklemi sağ tarafsız çözelim;

$$u_h' + u_h = 0 \Rightarrow \frac{du_h}{u_h} + dx = 0 \Rightarrow \ln u_h + x = \ln C \Rightarrow u_h = Ce^{-x} \text{ (homojen çözüm) (15)}$$

LSD yöntemi ile özel çözüme gidilirse;

$$C'e^{-x} = 4e^{-x} \sin x \Rightarrow C' = 4 \sin x \Rightarrow C = -4 \cos x + C_1 \quad (16)$$

(16) eşitliği (15) ifadesinde kullanılırsa;

$$u = (-4 \cos x + C_1)e^{-x} \Rightarrow u = -4e^{-x} \cos x + C_1 e^{-x}$$

$$e^y = -4e^{-x} \cos x + C_1 e^{-x} \text{ (genel çözüm)}$$

elde edilir.

7) $x^2 y'' + 4xy' + 2y = x^2$ (Euler diferansiyel denklemi) $x = e^t$ değişken dönüşümü ile;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^{-1} = \frac{\partial y}{\partial t} (e^t)^{-1} = e^{-t} \frac{\partial y}{\partial t} \quad (17)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = e^{-t} \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-t} \frac{\partial y}{\partial t} \right) = e^{-2t} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - e^{-2t} \frac{\partial y}{\partial t} \quad (18)$$

(17) ve (18) dif. denklemleri verilen diferansiyel denklemde yerine konulursa;

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial y}{\partial t} + 4 \frac{\partial y}{\partial t} + 2y = e^{2t} \Rightarrow y'' + 3y' + 2y = e^{2t} \quad (19)$$

elde edilir. Karakteristik denklem: $\alpha^2 + 3\alpha + 2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -1; \alpha_2 = -2$

$$y_h = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} \text{ (homojen çözüm)}$$

Özel çözüm tahmini: $y_p = Ae^{2t}$

Özel çözüm tahmini **(19)** eşitliğinde yerine konulursa;

$$4Ae^{2t} + 6Ae^{2t} + 2Ae^{2t} = e^{2t} \Rightarrow A = 1/12$$

$$y_p = (1/12)e^{2t} \quad (\text{özel çözüm})$$

$$y_g = y_h + y_p = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t} + (1/12)e^{2t} \quad (\text{genel çözüm-t'ye göre}) \quad \mathbf{(20)}$$

(20) eşitliğinde $t = \ln x$ konularak;

$$y_g = y_h + y_p = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + (1/12)x^2 \quad (\text{genel çözüm-x'e göre}) \quad \mathbf{(21)}$$

elde edilir.